WIKIPEDIA

Sainte-Laguë-Verfahren

Das **Sainte-Laguë-Verfahren** [sɛ̃tlaˈɡy] (auch: *Divisorverfahren mit Standardrundung*; in Deutschland: *Sainte-Laguë/Schepers-Verfahren*; im angelsächsischen Raum: *Webster-Methode, Methode der hälftigen Bruchteile, Methode der ungeraden Teiler*) ist eine Methode der proportionalen Repräsentation (ein Sitzzuteilungsverfahren), wie sie z. B. bei Wahlen mit dem Verteilungsprinzip Proporz (siehe Verhältniswahl) benötigt wird, um Wählerstimmen in Abgeordnetenmandate umzurechnen.

Inhaltsverzeichnis

Geschichte

Im Jahr 1832 propagierte der US-amerikanische Politiker Daniel Webster das Verfahren für die Zuteilung der Sitze des US-Repräsentantenhauses an die Bundesstaaten im Verhältnis der Bevölkerungszahlen des Zensus 1830. Der Webster-Methode war erstmals nach dem Zensus 1840 Erfolg beschieden; sie prägte die Kongressdebatten zur Sitzzuteilung über mehr als ein Jahrhundert. Seit 1941 ist das gesetzlich normierte Verfahren ein anderes: das Divisorverfahren mit geometrischer Rundung (Hill/Huntington, *method of equal proportions*, *EP-method*).[1]

Der französische Mathematiker André Sainte-Laguë bewies zu Beginn des 20. Jahrhunderts, dass das Verfahren dem Ziel der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen optimal nahekommt.[2] Der Berliner Statistiker Ladislaus von Bortkewitsch zeigte ergänzend, dass die Unterschiede zwischen den Erfolgswerten je zweier Wählerstimmen mit dem Sainte-Laguë-Verfahren so gering ausfallen wie irgend möglich.[3]

In der 9. Legislaturperiode (Beginn 1980) wurde das Verfahren im Deutschen Bundestag für die Verteilung der Ausschusssitze eingeführt. Die Vorarbeiten dazu leistete Hans Schepers, Leiter der Gruppe Datenverarbeitung der Wissenschaftlichen Dienste des Deutschen Bundestages, weshalb Bundestagsdokumente vom *Proportionalverfahren nach Sainte-Laguë/Schepers* sprechen.[4] Die Wahlkreiskommission für die 16. Legislaturperiode legte ihrem Bericht eine Anlage bei, in der sie die Vorzüge des Sainte-Laguë-Verfahrens im Vergleich mit dem damals im Bundeswahlgesetz vorgeschriebenen Hare/Niemeyer-Verfahren akribisch herausarbeitete.[5] Der Bundestag folgte der

Empfehlung und übernahm das Sainte-Laguë-Verfahren in das Bundeswahlgesetz.[6] Das Verfahren setzte sich auch bei anderen Wahlen der Legislative mehr und mehr durch: verwendet wurde und wird es bisher bei den Bürgerschaftswahlen in Bremen (seit 2003) und Hamburg (seit 2008) sowie den Landtagswahlen in Nordrhein-Westfalen (seit 2010), Rheinland-Pfalz (2011), Baden-Württemberg (2011), Schleswig-Holstein (2012) und Bayern (2022)[7], bei Bundestagswahlen seit 2009 und den Kommunalwahlen in Bayern (2020). Auch die Deutschland zustehenden Sitze im Europaparlament werden seit 2009 nach diesem Verfahren den Listen der Parteien zugeteilt.[8] Fachleute rechnen mit der Aufnahme des Verfahrens in weitere Wahlgesetze des Bundes und der Länder.

In der Schweiz wurde das Sainte-Laguë-Verfahren im Rahmen der Einführung des biproportionalen Divisorverfahrens (doppeltproportionales Zuteilungsverfahren) zur Bestellung der Parlamente in drei Kantonen eingesetzt: Zürich (seit 2006), Aargau und Schaffhausen (beide 2008). In diesen Kantonen wird das Verfahren auch bei den kommunalen Wahlen verwendet – sei es mit oder ohne Doppelproporz. Der Kanton Basel-Stadt führte 2011 das reine Sainte-Laguë-Verfahren zur Wahl seines Parlamentes (Grosser Rat) ein.[9]

Berechnungsweisen

→ *Hauptartikel: Sitzzuteilungsverfahren*

Das Sainte-Laguë-Verfahren kann mittels verschiedener Rechenwege ausgewertet werden, die nur als Wege verschieden sind, im Ergebnis aber übereinstimmen:

- Bestimmung eines Zuteilungsdivisors
- Auszählung eines Höchstzahlenschemas mit Teilern 0,5, 1,5, 2,5 usw.
- Auswertung als Rangmaßzahlverfahren

Alle Rechenwege enden mit ein und derselben Sitzzuteilung, eben der, die zum Sainte-Laguë-Verfahren gehört. Der erste Weg ist der effizienteste, der zweite populärer, der dritte obsolet.

Bestimmung eines Zuteilungsdivisors. Dieser Rechenweg ist in § 6 des Bundeswahlgesetzes formuliert:[10]

> „Der Zuteilungsdivisor ist so zu bestimmen, dass insgesamt alle verfügbaren Sitze vergeben werden. Dazu wird zunächst die Gesamtzahl der Stimmen aller zu berücksichtigenden Parteien durch die Gesamtzahl der Sitze geteilt. Entfallen danach mehr Sitze auf die Parteien als verfügbar, ist der Zuteilungsdivisor so heraufzusetzen, dass sich bei Neuberechnung die zu vergebende Sitzzahl ergibt; entfallen zu wenig Sitze auf die Parteien, ist der Zuteilungsdivisor entsprechend herunterzusetzen.“

Ein Beispiel für das Heraufsetzen wird weiter unten vorgeführt, ein Beispiel für das Heruntersetzen des Startdivisors findet sich im Hauptartikel Sitzzuteilungsverfahren.

Ist der finale Zuteilungsdivisor erreicht und beträgt er etwa wie unten 684, reduziert sich das Verfahren für die Beispieldaten auf den simplen Lösungssatz: Auf je 684 Stimmen entfällt rund ein Sitz. D. h. die Stimmenzahl einer Partei ist durch den Zuteilungsdivisor zu dividieren und der resultierende Quotient ist standardmäßig zu runden, um die Sitzzahl der Partei zu erhalten. Dies erklärt auch die alternative Bezeichnung des Sainte-Laguë-Verfahren als *Divisorverfahren mit Standardrundung*. Standardrundung bedeutet, dass Quotienten auf die nächstliegende Ganzzahl ab- bzw. aufgerundet werden je nachdem, ob ihr Bruchteil kleiner bzw. größer als ½ ist. Hierauf bezieht sich die alternative Bezeichnung als *Methode der hälftigen Bruchteile* (engl. *method of major fractions*).

Auszählung eines Höchstzahlenschemas mit Teilern 0,5, 1,5, 2,5 usw. Die Stimmen der zu berücksichtigenden Parteien werden fortlaufend geteilt durch 0,5, 1,5, 2,5 usw. Die Ergebnisse heißen *Vergleichszahlen*. Von den Vergleichszahlen werden so viele höchste Werte identifiziert, wie insgesamt Sitze zu vergeben sind. Jede Partei erhält so viele Sitze, wie es der Anzahl ihrer Beiträge zu den höchsten Vergleichszahlen, den *Höchstzahlen*, entspricht.

Die beschriebenen Schritte präsentieren sich als Schema, das unten beispielhaft illustriert ist. Vorteil eines Schemas ist, dass es sich schematisch abarbeiten lässt. Nachteil ist, dass die schematische Arbeit das Verfahren selbst mehr verschleiert als erklärt.

Auswertung als Rangmaßzahlverfahren. Die Auswertung als Rangmaßzahlverfahren war die Form, wie das Verfahren von Hans Schepers in die Arbeit des Bundestages eingeführt wurde. Die Scheperschen Rangmaßzahlen sind (bis auf einen konstanten Faktor) die Kehrwerte obiger Vergleichszahlen. Statt höchster Vergleichszahlen sind nun geringste Rangmaßzahlen gefragt. Die Sitze werden daher in der Reihung nach kleinsten Rangmaßzahlen zugeteilt.

Eigenschaften

Das Sainte-Laguë-Verfahren zeichnet sich unter allen Sitzzuteilungsverfahren dadurch aus, dass es besonders gut mit dem wahlrechtlichen Grundsatz der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen harmoniert. Dies gilt aus globaler wie auch aus lokaler Perspektive. Die globale Sicht schaut auf die Abweichungen der tatsächlichen Erfolgswerte vom Ideal eines ganzen, hundertprozentigen Erfolgs und aggregiert die Abweichungsquadrate in der Wählerschaft. Dieser Maßstab wird vom Sainte-Laguë-Verfahren optimiert (Sainte-Laguë 1910). Die lokale Sicht blickt auf die Unterschiede zwischen den Erfolgswerten zweier beliebiger Wählerstimmen. Beim Sainte-Laguë-Verfahren kann kein Sitztransfer die Unterschiede noch kleiner machen, als sie eh schon sind (Bortkewitsch 1919).

Zudem ist das Sainte-Laguë-Verfahren ein unverzerrtes Sitzzuteilungsverfahren. Unverzerrtheit besagt, dass wiederholte Anwendungen des Verfahrens erwarten lassen, dass für jede Partei die positiven und negativen Abweichungen zwischen Sitzzahlen und den Idealansprüchen, die aus einer theoretischen Dreisatzrechnung resultieren, sich gegenseitig aufheben und im Durchschnitt Null ergeben. Proporzglück paart sich mit Proporzpech. Jede Partei ist diesem Wechselspiel ausgesetzt und für jede Partei halten langfristig Glück und Pech sich die Waage. Das einzige andere unter den bekannten Verfahren, das ebenfalls unverzerrt ist, ist das Hare/Niemeyer-Verfahren.

Als Divisorverfahren ist das Sainte-Laguë-Verfahren auch kohärent, d. h. Teile und Ganzes passen immer nahtlos zusammen. Kohärenz impliziert Parteienzuwachs-, Hausgrößen- und Stimmenzuwachsmonotonie, d. h. Wachstum an einer Stelle wird nicht konterkariert durch widersinnige Rückläufigkeiten an anderen Stellen. Die Paradoxien, die beim Hare/Niemeyer-Verfahren gelegentlich irritieren (Parteienzuwachs-, Hausgrößen- oder Stimmenzuwachsparadoxie), können beim Sainte-Laguë-Verfahren nicht auftreten.

Das Sainte-Laguë-Verfahren muss nicht mehrheitstreu sein, wo auf Partei X zwar eine Absolutmehrheit an Stimmen entfällt, aber keine Absolutmehrheit an Sitzen bekommt. Soll Mehrheitstreue sichergestellt werden, ist das Sainte-Laguë-Verfahren durch eine Mehrheitsklausel zu modifizieren.[11]

Berechnungsbeispiel mit Bestimmung eines Zuteilungsdivisors

In einem Parlament sind insgesamt fünfzehn Sitze zu vergeben. Es sind 10.000 Wählerstimmen abgegeben worden, von denen 5200 auf Partei X, 1700 auf Partei Y und 3100 auf Partei Z entfallen.

Der Startdivisor ist 667, der gerundete Quotient 10.000 / 15 aus Gesamtstimmen und Gesamtsitzen. Standardrundung der Quotienten 7,8 : 2,55 : 4,6 verteilt 8 : 3 : 5 Sitze. Zusammen sind dies sechzehn Sitze, ein Sitz zu viel. Der Startdivisor ist heraufzusetzen.

Wenn der neue Divisor D oberhalb der Marke 5200 / 7,5 = 693,3 zu liegen kommt, erhält Partei X einen Sitz weniger. Denn D > 5200 / 7,5 bedeutet, dass der Quotient 5200 / D kleiner als 7,5 wird und nur 7 (oder weniger) Sitze rechtfertigt.

Über der Marke 1700 / 2,5 = 680 bekommt Partei Y einen Sitz weniger.

Über der Marke 3100 / 4,5 = 688,9 bekommt Partei Z einen Sitz weniger.

Von diesen drei Marken wird als erste die niedrigste erreicht. Sie gehört zu Partei Y:

{\displaystyle \min {\bigg \{}{\frac {5200}{7{,}5}},{\frac {1700}{2{,}5}},{\frac {3100}{4{,}5}}{\bigg \}}={\frac {1700}

Mit einem Divisor größer als 680 bekommt Partei Y höchstens zwei Sitze, so dass die Gesamtzahl der Sitze auf fünfzehn sinkt. Größer als 3100 / 4,5 = 688,9 darf der Divisor nicht werden, sonst würde Partei Z nur vier Sitze bekommen und die Gesamtsitzzahl fünfzehn unterschritten. Jede Zahl im Bereich von 680 bis 688,9 kann als Divisor dienen. Es bietet sich an, als Zuteilungsdivisor die Mitte 684 auszuwählen.

Im Ergebnis führt das Sainte-Laguë-Verfahren zu einer Zuteilung von rund einem Sitz je 684 Stimmen. Die Quotienten aus Stimmen und Zuteilungsdivisor sind auf so viele Nachkommastellen zu berechnen, dass sichtbar wird, ob der Bruchteilsrest unter bzw. über der Rundungsschwelle ,5 liegt und demgemäß ab- bzw. aufzurunden ist. Das Ergebnis lässt sich übersichtlich als Tabelle darstellen:

Sainte-Laguë-Verfahren
als Divisorverfahren mit Standardrundung

Partei	Stimmen	Quotient	Sitze
X	5200	7,6	8
Y	1700	2,49	2
Z	3100	4,53	5
Summe (Divisor)	**10.000**	**(684)**	**15**
Auf je 684 Stimmen entfällt rund ein Sitz.			

Berechnungsbeispiel als Höchstzahlenschema

Die Stimmen werden fortlaufend durch 0,5, 1,5, 2,5 usw. geteilt; die Teilungsergebnisse dienen als „Vergleichszahlen". Jede Partei erhält so viele Sitze, wie oft sie zu den fünfzehn höchsten Vergleichszahlen, den *Höchstzahlen*, beiträgt. Um die Höchstzahlen zu identifizieren, kann im vorliegenden Beispiel die Berechnung der Vergleichszahlen bei Erreichen des Dezimalkommas abgebrochen werden:

Sainte-Laguë-Verfahren
als Höchstzahlenschema

Partei	**X**		**Y**		**Z**	
Stimmen	5200		1700		3100	
Vergleichszahlen						
Stimmen/0,5	1	10400	4	3400	2	6200
Stimmen/1,5	3	3466	10	1133	6	2066
Stimmen/2,5	5	2080		680	8	1240
Stimmen/3,5	7	1485		485	12	885
Stimmen/4,5	9	1155		377	15	688
Stimmen/5,5	11	945		309		563
Stimmen/6,5	13	800		261		476
Stimmen/7,5	14	693		226		413
Stimmen/8,5		611		200		364
Auszählung der fünfzehn Höchstzahlen						
Sitze	8		2		5	

Die Auszählung der Höchstzahlen bleibt offensichtlich dieselbe, wenn die Teiler 0,5, 1,5, 2,5 usw. ersetzt werden durch die Teiler 1, 3, 5 usw. Das Sainte-Laguë-Verfahren wird daher auch *Methode der ungeraden Teiler* genannt.

Die Arbeit mit Höchstzahlen stößt bei größeren Gremien an Grenzen. Im 20. Deutschen Bundestag (ab 2021) sitzen acht Parteien, auf die stärkste Partei entfallen 206 der 736 Gesamtsitze. Die Vergleichszahlen wuchern zu einem Block mit acht Spalten und mehr als zweihundert Zeilen; in diesem Block wären über siebenhundert Höchstzahlen zu identifizieren.

Modifikationen des Sainte-Laguë-Verfahrens

Das Sainte-Laguë-Verfahren wird in Skandinavien in Modifikationen verwendet, die den ersten Teiler 0,5 auf 0,6 (Schweden ab 2014) oder 0,7 (Norwegen, Schweden bis 2013) heraufsetzen.[12]

Die Motivation für die Modifikationen wird aus der Berechnungsweise als Divisorverfahren mit Standardrundung einsichtig. Dort nehmen die Teiler die Rolle von Sprungstellen ein, um die Rundungsrichtung für die Quotienten festzulegen. Die Werte 0,5, 0,6 bzw. 0,7 sind Sprungstellenkandidaten für das erste Intervall von Null bis Eins. Ein Quotient unterhalb der Sprungstelle wird auf null Sitze abgerundet, die Partei verpasst den Einzug ins Parlament. Oberhalb der Sprungstelle wird auf einen Sitz aufgerundet, die Partei erlangt parlamentarische Präsenz. Der Rundungsbonus, dass der erste Sitz nur durch Aufrundung ins Leben gerufen wird, verringert sich von 0,5 über 0,4 auf 0,3 Sitzbruchteile.

Die Erschwerung für die Erlangung des ersten Sitzes wird auch durch die *natürliche Sperrklausel* erfasst. Dies ist der kleinste Stimmenanteil, den eine Partei braucht, um mindestens einen Sitz zu erhalten und ins Parlament einzuziehen. Sie beruht auf der Zahl der zu vergebenden Sitze (h, Hausgröße) und der Zahl der zu berücksichtigenden Parteien (ℓ, Listenzahl). Für das Sainte-Laguë-Verfahren (mit erstem Teiler 0,5) und die beiden Modifikationen (mit ersten Teilern 0,6 bzw. 0,7) lassen sich die jeweiligen natürlichen Sperrklauseln formelmäßig angeben:[13]

$$\frac{0,5}{h+0,5-(\ell-1)/2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{0,6}{h+0,6-(\ell-1)/2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{0,7}{h+0,7-(\ell-1)/2}$$

In obigem Beispiel, in dem h = 15 Sitze auf ℓ = 3 Parteien zu verteilen sind, wachsen die natürlichen Sperrklauseln demgemäß von 3,4 über 4,1 auf 4,8 Prozent der Gesamtstimmen an. Die Anhebung des ersten Teilers macht es zunehmend schwerer, dass eine Zwergpartei den Einzug ins Parlament schafft.

Weblinks

- Sainte-Laguë-Verfahren. (http://www.wahlrecht.de/verfahren/stlague.html) Wahlrecht.de
- Sainte-Laguë-Rangmaßzahlverfahren. (http://www.wahlrecht.de/verfahren/rangmasszahlen.html) Wahlrecht.de
- Reapportionment and Redistricting in the USA (http://www.aceproject.org/main/english/bd/bdy_us.htm) – Webster-Verfahren in den USA. ACE Project (englisch)
- Sitzerechner nach Sainte-Laguë / Schepers-Verfahren (http://staatsrecht.honikel.de/de/sainte-lague-schepers-verfahren.htm)

Einzelnachweise

1. Michel L. Balinski/H. Peyton Young: *Fair Representation – Meeting the Ideal of One Man, One Vote.* Yale University Press, New Haven CT 1982. Second Edition (mit identischer Seitenzählung): Brookings Institution Press, Washington DC 2001, S. 30–58.
2. André Sainte-Laguë: La représentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure, Troisième série 27* (1910) 529–542.
3. Ladislaus von Bortkiewicz: Ergebnisse verschiedener Verteilungssysteme bei der Verhältniswahl. *Annalen für soziale Politik und Gesetzgebung 6* (1919) 592–613, S. 608.
4. Peter Schindler: *Datenhandbuch zur Geschichte des Deutschen Bundestages 1949–1999 (https://www.bundestag.de/dokumente/parlamentsarchiv/datenhandbuch_archiv),* S. 2085.
5. Bundestagsdrucksache 16/4300 vom 24. Januar 2007, S. 27–43.
6. Gesetz zur Änderung des Wahl- und Abgeordnetenrechts vom 17. März 2008, BGBl. I 2008 S. 394 (http://www.bgbl.de/xaver/bgbl/start.xav?startbk=Bundesanzeiger_BGBl&jumpTo=bgbl108010s0394.pdf), Artikel 1.
7. *Gesetz über Landtagswahl, Volksbegehren und Volksentscheid Art. 42.* (https://www.gesetze-bayern.de/Content/Document/BayLWG-42) Abgerufen am 22. Juni 2022.
8. *Wahlbestimmungen*. In: Bundeszentrale für politische Bildung (Hrsg.): *Wahlen zum Europäischen Parlament* (= *Informationen zur politischen Bildung aktuell*). Nr. 25. Bonn 8. Mai 2014 (bpb.de (http://www.bpb.de/izpb/183761/wahlbestimmungen) [abgerufen am 23. Mai 2014]).
9. Bericht 09.1775.02 der vorberatenden Spezialkommission (http://www.grosserrat.bs.ch/?gnr=09.1775)
10. Die Terminologie des Gesetzes ist leicht verschlankt.
11. Siehe Abschnitt 4.6 "Mehrheitstreue und Mehrheitsklauseln" in Friedrich Pukelsheim: *Sitzzuteilungsmethoden – Ein Kompaktkurs über Stimmenverrechnungsverfahren in Verhältniswahlsystemen.* Springer-Verlag, Berlin 2015, doi:10.1007/978-3-662-47361-0, eBook ISBN 978-3-662-47361-0, Softcover ISBN 978-3-662-47360-3.
12. Dieter Nohlen: *Wahlrecht und Parteiensystem, 6. Auflage*, Opladen 2009, Seiten 116, 223, 522 bezeichnet die Modifikation mit erstem Teiler 0,7 als die "ausgeglichene Methode"; eine Erläuterung des Attributs "ausgeglichen" wird nicht gegeben.
13. Siehe Abschnitt 4.5 "Stimmenhürden für modifizierte Divisorverfahren" in Friedrich Pukelsheim: *Sitzzuteilungsmethoden – Ein Kompaktkurs über*

Stimmenverrechnungsverfahren in Verhältniswahlsystemen. Springer-Verlag, Berlin 2015.